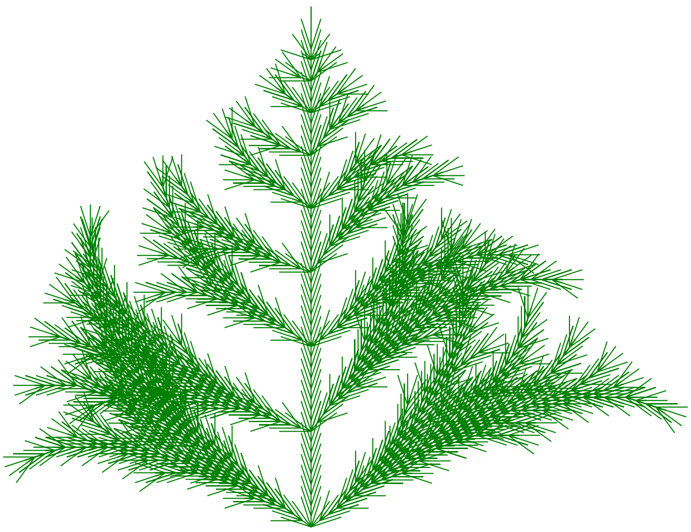
第九届拉姆杯数学竞赛

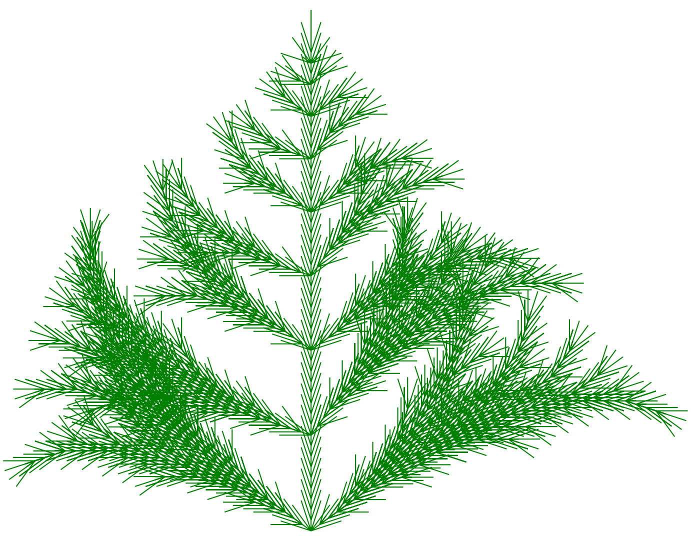
大学组(一)

8.29



比 赛 介 绍

1. 满分为100分, 考试将于8月29日晚上21:00开始.
2. 考试结束后, 请尽快打开数学竞赛网站链接 **http://lamu.run** (或 **https://lamu.run**), 完成答题卡的上传.
如果您不知道如何操作, 或者您的文件太大(超过7MB), 您也可以将答题卡发送到我的个人网站邮箱 **alinalagrange@lamu.run**, 或者发送到数学竞赛官方邮箱 **math@lamu.run**.
3. 这次考试是闭卷考试, 请在考试期间不要互相讨论, 也不要向其他聊天群组发送题目询问.
4. 这次竞赛是由 Alina Lagrange 命题.
(我的个人网站是 **http://alinalagrange.cn**)



填空题 (满分32分，请直接填写结果)

1. Catalan 常数常用字母 G 表示，它的定义是

$$G := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}.$$

参考以上，计算

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x + \cos x)\,\mathrm{d}x.$$

2. 设 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，$n = 2869$，计算

$$\sum_{p=1}^{n} \int_0^p \cos \frac{2\pi n[x+1]}{p}\,\mathrm{d}x.$$

3. 计算

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\arccos\left(\frac{1}{1+2\cos\theta}\right)}{1+e^{\sin(\theta^3)}}\,\mathrm{d}\theta.$$

4. 设

$$\mathscr{H}_n = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \binom{n}{m} \frac{1}{m}.$$

计算无穷级数

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathscr{H}_n}{n^3}.$$

解答题 (满分68分，解答请写出证明或者计算过程)

5. (本小题满分14分)
设

$${}^*\mathbb{R}_+^4 := \{(x,y,z,t) \mid x,y,z,t > 0\},$$

求

$$\iiiint_{{}^*\mathbb{R}_+^4} \frac{\ln(x\coth x)}{x^2} \cdot \frac{\ln((x+y)\coth(x+y))}{(x+y)^2} \cdot \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t}{(1+z^{2025})(1+(z+t)^{2025})}.$$

6. (本小题满分14分)
(i) 设光滑函数 $\mu(x), x \in \mathbb{R}^n (n \geq 2)$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 \mu}{\partial x_n^2} = 0,$$

且满足

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\mu(x)|^2 \, \mathrm{d}x \leq 2025.$$

求所有满足上述条件的函数 μ.
(ii) 设光滑函数 $u(x), x \in \mathbb{R}^n (n \geq 2)$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = u,$$

并且

$$|u(x)| \leq 2025.$$

求所有满足上述条件的函数 u.

7. (本小题满分20分)
如图所示, 在开心农场的农场发明屋的角落里, 有一台孵蛋机. 在某一天, 管理农场发明屋的大卫准备对孵蛋机进行一次日常检查. 请你协助他解决一些问题或者进行一些探究.
(a) 大卫看见墙上的手稿, 思考了一些时间, 突然大声疾呼: "如此手稿, 确有问题! 如果演算第一步推导都有错误, 那我们的孵蛋机确有问题!" 确实, 之前庄园的孵蛋机经常出故障. 我们仔细观察会发现, 墙上手稿里面的积分确有问题. 无论积分(无穷)区间取 $\mathbb{R}$ 还是 $\mathbb{R}_+$, 其结果都是不正确的. 图片中积分是

$$I_p = \int_{\mathbb{R}_+} e^{\frac{-x^p}{p}} \mathrm{d}x$$

在 $p = 2$ 时的特殊情况. 请证明: 当 $p = 2 + \frac{1}{n}, n \geq 2025$ 时,

$$I_p > \left(2 + \frac{1}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2n+1}} \frac{4n + 4 + \sin\frac{1}{n}}{3n + 1}.$$

(b) (i) 孵蛋机器的很多状态变量都可以使用形如

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \omega(t, r), \quad r(t_0) = r_0$$

的微分方程来描述. 对于非负的连续函数 $\omega : [t_0, \beta) \times [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ 及 $v : [\alpha, \beta) \to [0, +\infty)$, 若当 $v(s) \leq v(t) \quad (t \in (t_0, \beta), s \in (\alpha, t])$ 时, 有

$$\limsup_{h \to 0+} \frac{v(t+h) - v(t)}{h} \leq \omega(t, v(t))$$

成立, 其中 $t_0 \in [\alpha, \beta)$. 又设对于 $r_0 \geq \sup_{\alpha \leq s \leq t_0} v(s)$,

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\omega(t,r),\quad r\left(t_0\right)=r_0$$

的最大解 $r(t)$ 于区间 $[t_0,\beta)$ 上存在, 证明

$$v(t)\leq r(t),\quad t\in\left[t_0,\beta\right).$$

(ii) 在孵蛋机运行过程中，温度 $T(t)$ 需要保持稳定. 由于传感器和加热器存在反应延迟，温度变化可以简化为以下微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t}=-a\,T(t-\tau),\qquad \tau>0.$$

其中:
a: 常数, 满足 $a>0$,
$T(t)$: 表示温度偏离理想设定值的大小(单位: ℃),
τ: 传感器反馈的时间延迟 (单位: 秒).
请你研究当 $0<a\tau<\frac{\pi}{2}$ 时候, 孵蛋机器环境温度能不能保持渐近稳定性, 即是否有

$$\lim_{t\to\infty}T(t)=0$$

成立.

8. (本小题满分20分)
设 $Q \subset \mathbb{R}^n$ 是边平行于坐标轴的方体. 定义

$$\mathrm{Avg}_Q f = \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|\,\mathrm{d}y$$

表示 f 在 Q 上的平均值, 其中 $|Q|$ 表示方体 Q 的体积. 在本题中, 我们始终假设 f 局部可积(默认在任何有界集合上可积).
(i) 设常数 $p > 1$, 局部可积函数 φ 满足: 存在常数 $C > 0$ 使得对任意方体 $Q \subset \mathbb{R}^n$,

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q e^{\varphi(x)-\mathrm{Avg}_Q\varphi}\mathrm{d}x\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q e^{-\frac{\varphi(x)-\mathrm{Avg}_Q\varphi}{p-1}}\mathrm{d}x\right)^{p-1} \le C.$$

证明

$$\int_{\mathbb{R}^{2025}} \prod_{i=1}^{2025} e^{-\pi x_i^2\left(\frac{x_i+|Q|^{2i}}{x_i+|Q|^i}\right)^2}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_{2025} \le \frac{1}{|Q|}\int_Q e^{\varphi(x)-\mathrm{Avg}_Q\varphi}\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_{\mathbb{R}^{2025}} \prod_{i=1}^{2025} e^{-\pi x_i^2\left(\frac{x_i+|Q|^{2i}}{x_i+|Q|^i}\right)^2}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_{2025} \le \frac{1}{|Q|}\int_Q e^{-\frac{\varphi(x)-\mathrm{Avg}_Q\varphi}{p-1}}\,\mathrm{d}x.$$

其中 $|Q| \ge 1$.
(ii) 我们用

$$f_Q^* = \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y) - \mathrm{Avg}_Q f|\,\mathrm{d}y$$

表示 f 在 Q 上的平均振荡. 定义

$$\|f\|_{\mathscr{B}} := \sup_{Q\subset\mathbb{R}^n} f_Q^*.$$

如果函数 f 满足

$$\|f\|_{\mathscr{B}} < \infty,$$

我们称 f 是 “有界平均振荡函数”. 同时定义

$$\|f\|'_{\mathscr{B}} := \sup_Q \inf_c \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y) - c|\,\mathrm{d}y.$$

对于区间 $E = (a, b) \subset \mathbb{R}_+$, $b > a > 0$, 是否存在无界函数 $u(x)$ 满足

$$\sup_{E\subset\mathbb{R}_+} \frac{1}{|E|}\int_E |u(y) - \mathrm{Avg}_E u|\,\mathrm{d}y < \infty.$$

即无界函数 $u(x)$ 是 “有界平均振荡函数” ? 证明你的结论.
(iii) 设 f, g 都是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的 “有界平均振荡函数” , 证明或者否定以下不等式:

$$\|\max\{f, g\}\|_{\mathscr{B}} \le \|f\|_{\mathscr{B}} + \|g\|_{\mathscr{B}},$$

$$\|\min\{f, g\}\|_{\mathscr{B}} \le \|f\|_{\mathscr{B}} + \|g\|_{\mathscr{B}}.$$