



第九届拉姆杯数学竞赛

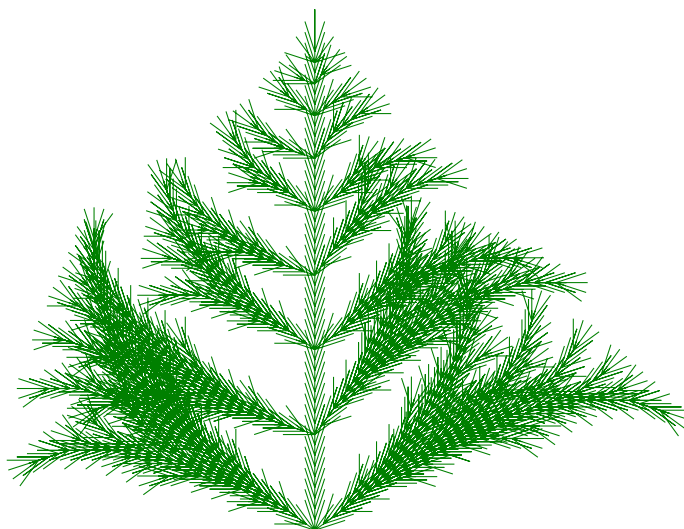
大学组(二)

8.29



Contest Introduction

1. There are 6 problems. The full mark of this math contest is 120. The exam will begin on 8.29 21:00.
2. After the exam, you need to open the math website link **<http://lamu.run>** (or **<https://lamu.run>**) as soon as possible to complete the upload of the answer sheet. If you do not know how to operate it or your file is too large (more than 7MB), you can also send it to my personal website E-mail: **alinalagrange@lamu.run** or my math website official E-mail: **math@lamu.run**
3. This time the contest is a closed book exam. Do not discuss each other or send questions to other chat groups during the exam.
4. This contest is made by Alina Lagrange.
(My personal website **<http://alinalagrange.cn>**)





Question 1 (20 points). 判断以下命题是否正确, 正确的命题给出证明, 错误的命题说明理由.

- (a) 无限维的 Banach 空间 X 不能表示为可数个列紧集的并集.
 (b) 设 X 为 Banach 空间, A, B 是 X 上的有界线性算子, 则 $\sigma(AB)$ 与 $\sigma(BA)$ 最多相差 $\{0\}$.
 (c) 若 u 是 $\mathbb{R}^n$ 上的调和函数, 且满足

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(x)|^2 dx < \infty,$$

则 $u \equiv 0$.

Question 2 (15 points). 设 $G \neq \mathbb{C}$ 是 $\mathbb{C}$ 的单连通子集, $f: G \rightarrow G$ 是全纯函数, 且 $f(z)$ 不恒等于 z , 证明 f 在 G 中至多有一个不动点.

Question 3 (20 points). 设 f 是无界整函数. 假设对任意实数 z_0 , 在 z_0 处展开的解析级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

中, 存在某个正整数 n 使得 $c_n = 0$ (即 $f^{(n)}(z_0) = 0$). 请探究是否存在这样的 f , 使得 $\mathfrak{H}(z) = e^z - f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上的零点个数不超过 2025? 若不存在, 证明你的结论; 若存在, 求出所有满足上述条件的 f .

Question 4 (20 points).

(i) 设 f 满足 $f \in C^1(\mathbb{T})$, 令 $\hat{f}(k) (k \in \mathbb{Z})$ 为函数 f 的 Fourier 系数, 证明

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{T})} + \frac{\sqrt{3}}{6} \|f'\|_{L^2(\mathbb{T})}.$$

(ii) 证明: 对于任意 $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 4$,

$$\|u\|_2^2 \|u\|_2^{\frac{4}{n}} \leq \frac{1}{4\pi} (n+2)^{1+\frac{2}{n}} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)^{-\frac{n+2}{n}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)^{-\frac{2}{n}} \|u\|_1^{\frac{4}{n}} \|\nabla u\|_2^2.$$

这里 $\Gamma(\cdot)$ 表示 Γ 函数.



Question 5 (15 points). 考虑非线性泛函微分方程

$$\dot{x}(t) = - \int_{t-1}^t g(x(s))ds,$$

其中连续函数 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 $xg(x) > 0 (x \neq 0)$, 且

$$|g(x)| \leq c|x| \quad (x \in \mathbb{R}),$$

c 为正常数. 当 $c < \frac{3}{2}$ 时, 讨论上述泛函微分方程 $\dot{x}(t) = - \int_{t-1}^t g(x(s))ds$ 零解的稳定性.

Question 6 (30 points). 假设 $g(x)$ 是 $\bar{I}$ 上的 m 次连续可微的函数, $I \subset \mathbb{R}$ 是一个开区间, $\bar{I}$ 表示 I 的闭包. 对于给定的常数 $h > 0$, 设

$$I_h = \{x | |g(x)| < h, x \in I\}.$$

另外设

$$Q = \{\alpha | \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n, |\alpha| = l, \alpha_i \geq 0\},$$

其中 l 是一个正整数.

(i) 如果存在常数 d 使得在 I 上, $|g^{(m)}(x)| \geq d > 0$, 证明如下测度估计

$$\mathbf{m}(I_h) \leq \left(\frac{m+1}{m} \left[\Gamma(\ln(m+1) - \ln m) + \Gamma\left(\sin \frac{1}{m}\right) \right] + m^2 - m - 2 + \frac{2}{d} \right) h^{\frac{1}{m}}.$$

这里 $\Gamma(\cdot)$ 表示 Γ 函数, $\mathbf{m}(I_h)$ 表示可测集合 I_h 的 Lebesgue 测度.

(ii) 对于 $\alpha, \beta \in Q$, " $\alpha \prec \beta$ " 表示存在 $j \leq n$ 使得当 $i < j$ 时, $\alpha_i = \beta_i$, 并且 $\alpha_j < \beta_j$. 这样, 对于任意 $\alpha, \beta \in Q$, 或者 $\alpha \prec \beta$, 或者 $\beta \prec \alpha$, 或者 $\alpha = \beta$. 如果 $\alpha \prec \beta$, 并且 $\beta \prec \gamma$, 则 $\alpha \prec \gamma$. 令 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_i = M^{n-i}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $M = nl$, 则 $\alpha \prec \beta$ 当且仅当 $(\alpha, \lambda) < (\beta, \lambda)$. 根据 $\alpha \prec \beta$ 的定义, 存在 $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ 使得当 $i < j$ 时, $\alpha_i = \beta_i$, 并且 $\alpha_j < \beta_j$. 注意到 $\alpha_i, \beta_i \leq l$, $\alpha_j + 1 \leq \beta_j$ 和 $M = nl$, 可得 $(\alpha, \lambda) < (\beta, \lambda)$. 根据序的择一性, 容易得到上述结论. 根据序关系 " $\prec$ ", 可以把 Q 记为

$$Q = \{\alpha(i) | |\alpha(i)| = l; \alpha_j(i) \geq 0, i = 1, 2, \dots, N, \alpha(1) \prec \alpha(2) \prec \dots \prec \alpha(N)\},$$

这里 α_j 是 α 的分量, N 是 Q 的基数. 令 $n_i = (\alpha(i), \lambda)$, 有 $n_1 < n_2 < \dots < n_N$. 假设 $f(x)$ 是充分光滑的函数, 证明存在一组向量 $v(1), v(2), \dots, v(N)$ 满足对任意 $\beta \in Q$, 存在常数 $c_1, c_2, \dots, c_N$ 使得

$$\frac{\partial^\beta f}{\partial x^\beta} = \sum_{i=1}^N c_i D_{v(i)}^l f(x),$$

其中 $D_v^l f(x)$ 表示 $f(x)$ 沿 v 方向的 l 阶方向导数, $v(i)$ 和 c_i 与 x 和 $f(x)$ 无关.

(iii) 假设 $g : x \in \bar{\Omega} \rightarrow (g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x))$ 是 $\bar{\Omega}$ 上的解析映射, 其中 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界连通区域, 令

$$\Omega_\delta = \left\{ x \left| k_1 g_1(x) + k_2 g_2(x) + \dots + k_n g_n(x) \geq \frac{\delta}{|k|^\tau}, \forall 0 \neq k \in \mathbb{Z}^n \right. \right\},$$

其中 $\tau > n^2 - n - 1$ 是常数. 如果对于所有的 $x \in \bar{\Omega}$,

$$\text{rank} \left\{ \frac{\partial^\alpha g}{\partial x^\alpha} \mid \forall \alpha \in \mathbb{Z}^n, |\alpha| \leq n-1 \right\} = n,$$

证明对任意充分小的 $\delta > 0$, 有

$$\mathfrak{m}(\Omega - \Omega_\delta) \leq \mathfrak{C}(\text{diam } \Omega)^{n-1} \delta^{\frac{1}{n-1}},$$

其中 $\mathfrak{C}$ 是与 δ 无关的常数.

(iv) 考虑近可积映射 $(\hat{y}, \hat{x}) = \Psi(y, x)$,

$$\hat{y} = y + \varepsilon g(y, x), \quad \hat{x} = x + \omega + \varepsilon f(y, x),$$

其中 $y \in G \subset \mathbb{R}^m$, G 是有界连通域, $x \in \mathbb{T}^n$, $\varepsilon > 0$ 是一个小参数. 假设:

(1) ω 是常向量, 满足

$$|(k, \omega) + k_0| \geq \frac{\gamma}{|k|^\tau}, \quad \forall 0 \neq k \in \mathbb{Z}^n, \forall k_0 \in \mathbb{Z}$$

其中 γ 和 τ 是正常数.

(2) g 和 f 是 $(G \times \mathbb{T}^n) + \delta$ 上的实解析函数, 其中常数 $\delta > 0$.

(3) 映射 Ψ 具有相交性质, 即对任意 $y \in G + \delta$, 有

$$((\mathbb{T}^n + \delta) \times \{y\}) \cap \Psi((\mathbb{T}^n + \delta) \times \{y\}) \neq \emptyset.$$

设条件 (1), (2), (3) 成立, 证明存在 $\varepsilon_* > 0$, 使得当 $\varepsilon \in [0, \varepsilon_*]$ 时, 对任意 $(y^{(0)}, x^{(0)}) \in G \times \mathbb{T}^n$ 和所有整数 $l \in [0, c_1 \exp(c_2 \varepsilon^{-\frac{1}{n+\tau+2}})]$, 有

$$|y^{(l)} - y^{(0)}| < c_3 \varepsilon^{\frac{1}{n+\tau+2}}.$$

这里 c_1, c_2, c_3 是不依赖 ε 的常数, 且 $(y^{(l)}, x^{(l)}) = \Psi^l(y^{(0)}, x^{(0)})$.