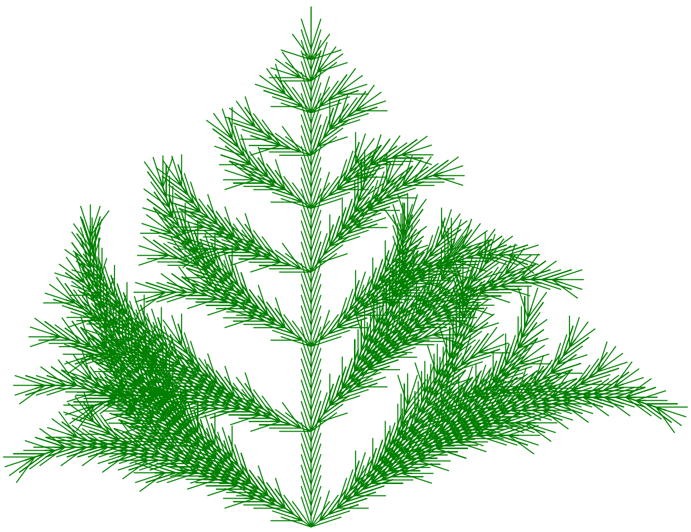
第八届拉姆杯数学竞赛

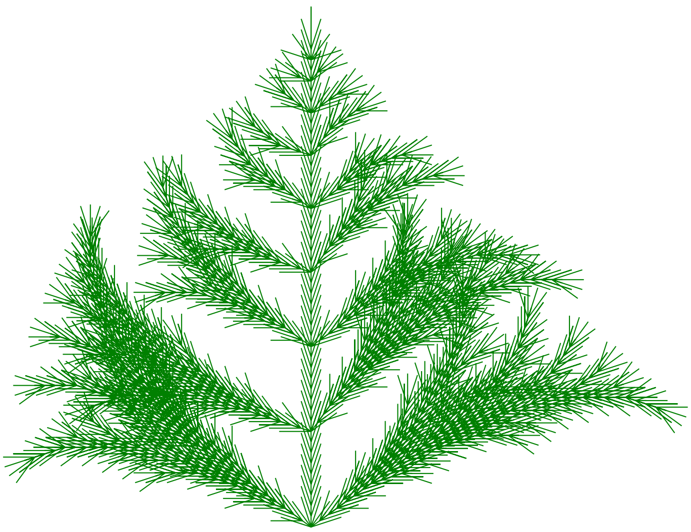
大学组(一)

2.3



比 赛 介 绍

1. 满分为100分, 考试将于2月3日晚上21:00开始.
2. 考试结束后, 请尽快打开数学竞赛网站链接 **http://lamu.run**
(或 **https://lamu.run**), 完成答题卡的上传. 如果您不知道如何操作, 或者您的文件太大(超过7MB), 您也可以将答题卡发送到我的个人网站邮箱 **alinalagrange@lamu.run**, 或者发送到数学竞赛官方邮箱 **math@lamu.run**.
3. 这次考试是闭卷考试, 请在考试期间不要互相讨论, 也不要向其他聊天群组发送题目询问.
4. 这次竞赛是由 Alina Lagrange 命题.
(我的个人网站是 **http://alinalagrange.cn**)



一. 判断题 (满分32分, 请判断下列命题是否正确并且证明你的结论)

1. 设 $f(x) \in C^1(\mathbb{R})$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ 且存在常数 $M > 0$ 使得 $|f(x)| \le M$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在.

2. 设 $f(x) \in C^1(\mathbb{R})$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

3. 设 $a_n > 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{a_n}$ 收敛, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$$

收敛, 而

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}}$$

发散.

4. 设 f 是定义在 $\mathbb{R}_+$ 上的函数, 正实数列 $\mathfrak{e}_n$ 递增且 $\lim\limits_{n\to\infty} \mathfrak{e}_n = \infty$, 满足

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathfrak{e}_{n+1}}{\mathfrak{e}_n} = 1.$$

如果

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\mathfrak{e}_n x\right) = 0,\ \forall x > 0,$$

则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

二. 填空题 (满分24分, 请直接填写结果)

5. 设

$$\mathscr{S}_1 = \lim_{n\to\infty} \int_{(0,1)^n} \frac{\sum\limits_{m=1}^{n} x_m^{2024}}{\sum\limits_{m=1}^{n} x_m^{2023}} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n$$

$$\mathscr{S}_2 = \lim_{n\to\infty} \int_{(0,1)^n} \cos\left(\frac{\pi}{3n} \sum_{m=1}^{n} x_m\right) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n$$

计算 $\mathscr{S}_1 + \mathscr{S}_2$.

6. 设 $n \in \mathbb{N}$,

$$\varphi_n = \int_n^{n+1} \ln \Gamma(x) \mathrm{d}x.$$

求 $\max\limits_{1\le n\le 2023} \varphi_n$.

7. 设

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

计算无穷级数

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^3}.$$

三.解答题 (满分44分, 解答请写出证明或者计算过程)

8. (本小题满分14分) 设集合

$$E=\{(x_1,x_2,\cdots,x_{2023}):0<x_{2023}<x_{2022}<\cdots<x_1<\frac{\pi}{2}\},$$

函数

$$f(x)=\frac{\sin^4 x+\sin^8 x\cos^8 x+\sin^4 x\cos^{12} x}{\sin^4 x+\cos^4 x}.$$

求

$$\int_E\prod_{m=1}^{2023} f(x_m)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_{2023}.$$

9. (本小题满分16分) 一个定义在区间上的实值函数 f 被称为 concave 函数, 如果对于任意区间内的 x 和 y, 以及任意的 $\alpha\in[0,1]$, 都有

$$f(\alpha x+(1-\alpha)y)\geq\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y).$$

(1) 设 $\psi(0)\geq 0$, $\psi(x)$ 在 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 上是 concave 函数, 对于 $\zeta,\theta\geq 0$, 证明

$$\psi(\zeta+\theta)\leq\psi(\zeta)+\psi(\theta).$$

特别地, 如果函数 $\psi:\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ 是单调非减的 concave 函数, $\psi(0)=0$, 对任意 $a,b\geq 0$, 证明

$$|\psi(a)-\psi(b)|\leq\psi(|a-b|).$$

(2) 设 $a>0$, $g(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 上的单调非减连续函数, $g(0)=0$, 对任意 $x>0$ 有 $g(x)>0$, 并且

$$\lim_{\eta\to 0^+}\int_\eta^a\frac{\mathrm{d}s}{g(s)}=\infty.$$

设 $\phi(x)$ 是定义在 $[0,a]$ 上的非负连续函数, 满足

$$\phi(x)\leq\int_0^a g(\phi(t))dt,\quad 0<x\leq a$$

证明 $\phi(x)=0$, $\forall x\in[0,a]$.
(3) 设 $y=y(t)\in\mathbb{R}$, $f(t,y)$ 在 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 连续, 函数 g 满足的条件与 (2) 完全相同, 运用 (2) 的结论, 证明: 对于非线性(非自治)常微分方程初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}=f(t,y(t)),\quad y(t_0)=y_0.$$

设 $\mathscr{E}\subset\mathbb{R}^2$ 包含了 (t_0,y_0), $E_0=\{(t,y):t\in\mathbb{R},|y-y_0|<a\}\subset\mathscr{E}$, 如果 $\forall(t,y_1),(t,y_2)\in\mathscr{E}$,

$$|f(t,y_1)-f(t,y_2)|\leq g(|y_1-y_2|),$$

则上述非线性微分方程初值问题在 $|y-y_0|\leq a$ 内存在唯一解.

10. (本小题满分14分)
拉姆学院是(游戏中)拉姆学习的场所, 请你运用所学数学知识解决一些在潜水课考试中实际情景所延伸出来的问题. 如图 1 还有图 2, 拉姆在潜水考试中所吐出的巨大气泡的表面可以近似看作半径为 $R\,(R>1)$ 的球面, 即

$$S^2=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2=R^2\},$$

其内部(三维开球体)

$$B^3 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 < R^2\}.$$

由于水流扰动影响以及封闭水缸容器底部压力影响等, 我们把气泡表面近似看作

$$S^2_{2+\epsilon} := \{(x, y, z) : |x|^{2+\epsilon} + |y|^{2+\epsilon} + |z|^{2+\epsilon} = R^{2+\epsilon}\},$$

这里 ϵ 是一个较小的固定正数, 其内部

$$B^3_{2+\epsilon} := \{(x, y, z) : |x|^{2+\epsilon} + |y|^{2+\epsilon} + |z|^{2+\epsilon} < R^{2+\epsilon}\}.$$

现在我们把这种情况推广到 n 维 $(n > 3)$ 空间里面去探讨, 此时对应 $B^n_{2+\epsilon}$ 为

$$B^n_{2+\epsilon} := \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) : \sum_{j=1}^{n} |x_j|^{2+\epsilon} < R^{2+\epsilon}\}.$$

请你计算 n 维 $2+\epsilon$ 球 $B^n_{2+\epsilon}$ 的 n 维体积, 即

$$\int_{B^n_{2+\epsilon}} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n.$$

Figure 1: 潜水考试

Figure 2: 我们把气泡表面近似看作 $S^2_{2+\epsilon} := \{(x, y, z) : |x|^{2+\epsilon} + |y|^{2+\epsilon} + |z|^{2+\epsilon} = R^{2+\epsilon}\}$