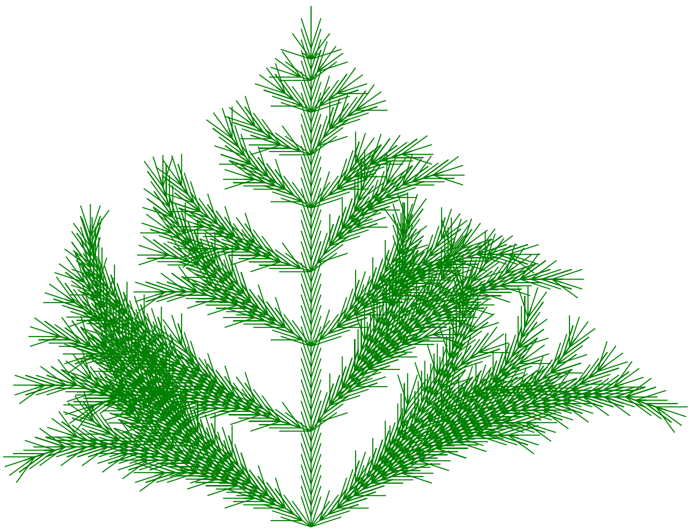
第八届拉姆杯数学竞赛

大学组(二)

2.3

Contest Introduction

1. There are 6 problems. The full mark of this math contest is 120. The exam will begin on 2.3 21:00.
2. After the exam, you need to open the math website link **http://lamu.run** (or **https://lamu.run**) as soon as possible to complete the upload of the answer sheet. If you do not know how to operate it or your file is too large (more than 7MB), you can also send it to my personal website E-mail: **alinalagrange@lamu.run** or my math website offical E-mail: **math@lamu.run**
3. This time the contest is a closed book exam. Do not discuss each other or send questions to other chat groups during the exam.
4. This contest is made by Alina Lagrange.
(My personal website **http://alinalagrange.cn**)



Question 1 (25 points)**.** 判断以下命题是否正确, 正确的命题给出证明, 错误的命题说明理由.
(1) 设 $1 \leq p < q < \infty$, $E = [2023, 2024]$, 则 $L^p(E) \subset L^q(E)$.
(2) 设 $1 \leq p < q < \infty$, $E = [2023, 2024]$, 则 $L^q(E) \subset L^p(E)$.
(3) 设

$$\mathcal{H}_t(x) = (4\pi t)^{-\frac{3}{2}} e^{-|x|^2/4t}, \quad x \in \mathbb{R}^3, t > 0$$

其中 $|x|$ 表示 Euclidean 范数. 则对于任意 $f \in L^3(\mathbb{R}^3)$,

$$\lim_{t \to 0} t^{\frac{1}{2}} \|\mathcal{H}_t * f\|_{L^\infty} = 0.$$

(4) 设 $1 \leq s \leq r \leq t < \infty, u \in L^s(\Omega) \cap L^t(\Omega)$, $\theta \in [0, 1]$ 满足

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{s} + \frac{1-\theta}{t}.$$

则 $u \in L^r(\Omega)$ 并且

$$\|u\|_r \leq \|u\|_s^\theta \|u\|_t^{1-\theta}.$$

Question 2 (15 points)**.** 设 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是全纯函数, 试确定所有的 f 使得 $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$F(z) = f \circ f(z) - z$$

没有零点.

Question 3 (20 points)**.** 说明: 从下面两题任意选择一题进行解答.
(A) 设 $f : D \to D$ 是全纯函数, 其中 $D = \{z \in \mathbb{C} : z < 1\}$ 表示单位圆盘, $f(0) = 0, \forall z \neq 0, f(z) \neq \frac{1}{2023}$. 证明

$$|f'(0)| \leq \frac{4046 \ln 2023}{2022 \cdot 2024}.$$

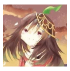
(B) 设 f 是右半平面 $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \Re z > 0\}$ 上的全纯函数, $\forall z \in \mathbb{C}^+, |f(z)| < 1$. 并且 $f(1) = 0$. 证明

$$\sum_{n=1}^{2023} |f(n)| < 2025 - 2\ln 2025.$$

Question 4 (20 points)**.** 令 $C([0, 1])$ 表示区间 $[0, 1]$ 上的实值连续函数空间. S 表示 $C([0, 1])$ 的子空间的闭包(在 L^2 范数下). 证明: 如果存在常数 $\mathcal{C} \geq 0$ 使得

$$\|f\|_\infty \leq \mathcal{C}\|f\|_2, \quad \forall f \in S,$$

那么 S 是有限维的.



Question 5 (20 points)**.** 设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集, $1 \le p < \infty$. 若 $L^p(E)$ 中的函数列 $\{u_n\}$ 满足
(1) $\forall n \in \mathbb{N}_+$, 存在常数 $M > 0$ 使得 $\|u_n\|_p \le M$.
(2) $u_n(x) \to u(x)$ a.e. $x \in \Omega \quad (n \to \infty)$.
证明 $u \in L^p(E)$ 并且

$$\lim_{n\to\infty}\left(\|u_n\|_p^p - \|u_n - u\|_p^p\right) = \|u\|_p^p.$$

‘

Question 6 (20 points)**.** 设 E 为 $\mathbb{R}^n$ 的子集, $s > 0$, 对任意的 $\delta > 0$, 定义

$$H_\delta^s(E) := \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}(\operatorname{diam} U_i)^s : E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i,\ \operatorname{diam} U_i < \delta\right\}.$$

当 δ 减小时, $H_\delta^s(E)$ 增大, 且当 $\delta \to 0$ 时趋于一极限 $H^s(E) = \lim\limits_{\delta\to 0} H_\delta^s(E)$, 称 $H^s(E)$ 为集合 E 的 s 维 Hausdorff 测度. 使得 $H^s(E)$ 从 ∞ 跳变到 0 的这个临界值 s 被称为 E 的 Hausdorff 维数, 记为 $\dim_H E$, 即 $\dim_H E = \inf\{s \ge 0 : H^s(E) = 0\}$. 设集合

$$F = \{x \in [0,1] : x \text{ 十进制展开式中只有偶数}\}.$$

F 可以由 $[0,1]$ 区间反复去掉一些子区间所得到. 具体步骤如下:
设 $F_0 = [0,1]$, 将 F_0 中区间 $\left[\frac{1}{10},\frac{2}{10}\right],\left[\frac{3}{10},\frac{4}{10}\right],\left[\frac{5}{10},\frac{6}{10}\right],\left[\frac{7}{10},\frac{8}{10}\right],\left[\frac{9}{10},\frac{10}{10}\right]$ 去掉之后得到集合 F_1.
按此方法继续进行下去, 在第 k 步中, F_k 中有 5^k 个长度为 $\frac{1}{10^k}$ 小区间. F 是属于所有 $F_k(k \ge 1)$ 的数组成的, 即

$$F = \bigcap_{k=0}^{\infty} F_k.$$

对上述定义的集合 F, 计算 $H^s(F)$ 以及 $\dim_H F$.