

π Σ π π

第十届拉姆杯数学竞赛

2026年8月19日（农历七月初七）至2026年8月26日23:59

欢迎各位踊跃参加 $O(n\ n)O$



官方网站: lamu.run

第十届拉姆杯数学竞赛详情请见官方网站。考试结束之前都可以报名。

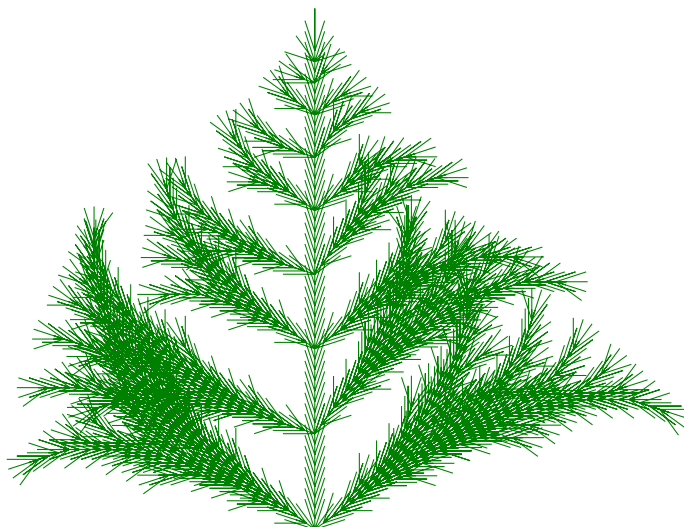
备注：由于全国大陆地区 93 个运营商中极少部分运营商使用域名地址备案白名单制，导致大约有 2-6 个运营商如福建电信用户不能进行 DNS 解析不能访问。可以用 **qq 邮箱** 发邮件给 **addresslamu@hotmail.com** 获取当前 ip 以访问。



第十届拉姆杯数学竞赛

大学组(一)

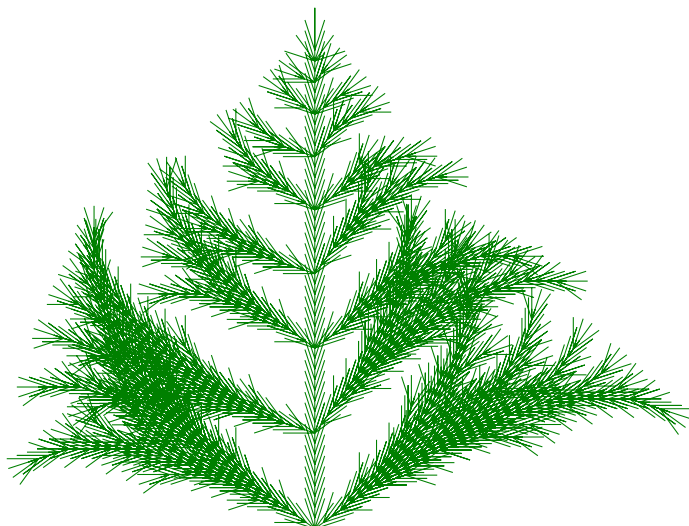
8.19





比 赛 介 绍

1. 满分为100分, 考试将于8月19日晚上18:45开始.
2. 考试结束后, 请尽快打开数学竞赛网站链接 <http://lamu.run> (或 <https://lamu.run>), 完成答题卡的上传.
如果您不知道如何操作, 或者您的文件太大(超过60MB), 您也可以将答题卡发送到我的个人网站邮箱 alinalagrange@lamu.run, 或者发送到数学竞赛官方邮箱 math@lamu.run.
3. 这次考试是闭卷考试, 请在考试期间不要互相讨论, 也不要向其他聊天群组发送题目询问.
4. 这次竞赛是由 Alina Lagrange 命题.
(我的个人网站是 <http://alinalagrange.cn>)





填空题 (满分24分)

1. 计算

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \arccos \left(\frac{1 - 2 \cos \theta}{1 + 4 \cos \theta} \right) d\theta + \int_0^{\arccos \frac{1}{4}} \arccos \left(\frac{1}{1 + 2 \cos \theta} \right) d\theta.$$

2. 求

$$\min_{x \in \mathbb{R}} \sqrt{3 + \cos x} + \sqrt{2 \sin x + 7}.$$

3. 设

$$\mathcal{H}_n = \sum_{m=1}^n (-1)^{m-1} \binom{n}{m} \frac{1}{m},$$

并令

$$b_n = \mathcal{H}_n - \ln n, \quad n \geq 1.$$

定义 $\{a_n\}$:

$$a_1 = 1, \quad a_n = \frac{b_n + 2}{b_{n-1}}, \quad n \geq 2.$$

求级数

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

4. Catalan 常数常用字母 G 表示, 它的定义是

$$G := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}.$$

参考以上, 计算

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{(1+xt) \ln x \ln t}{(1+x^2)(1+t^2)} dx dt.$$

判断题 (满分15分, 判断下面命题是否正确, 请给出判断结果并写出证明过程)

(I) 存在 $f \in C[0, 1]$ 使

$$\int_0^1 x f(x) dx = 1$$

且对一切 $n \in \{0, 2, 3, \dots\}$ 有

$$\int_0^1 x^n f(x) dx = 0.$$



(II) 设

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n} \cos(10^{2n}x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

那么 f 处处不可微.

(III) 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 > 0$,

$$a_{n+1} = a_n + \ln \left(1 + \frac{a_n}{n} \right),$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{a_n \ln n} - \frac{4}{3 \ln n} (\ln a_n - \ln n) = 1.$$

解答题 (满分61分, 解答请写出证明或者计算过程)

(本小题满分15分) 设 F_n 为 Fibonacci 数列, 满足 $F_1 = F_2 = 1$,

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad \forall n \geq 2,$$

令

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n F_{n+4}}.$$

设函数 $\varphi(x) > 0$ 在 $(0, \infty)$ 单调递增, 同时函数 $u(x)$ 满足 $0 < u(x) < \infty$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi(tx)}{\varphi(t)} = u(x), \quad \forall x > 0,$$

且

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi(te)}{\varphi(e)} = u(e) = e^{\frac{18}{7}S}.$$

设

$$I = \int_{\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)^{2026}} \prod_{j=1}^{2026} \left[1 + u(x_j) \ln u(x_j) - \ln(u(x_j) + 1) \right]^{-1} dx_1 dx_2 \cdots dx_{2026}.$$

令

$$\begin{aligned} \zeta_n &= \ln(5 + 3n^2) - \ln 5 - 2 \ln n, \\ \theta_n &= \zeta_n - \left(\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{n^2}\right)} + \frac{3}{5} \right) - e^{\frac{1}{n^2} - \frac{2}{5}}. \end{aligned}$$

证明

$$I < \frac{1}{4^{2026} \prod_{n=2026}^{4051} (2 + \theta_n)}.$$



(本小题满分20分)

(1) 设

$$I(k) = \int_0^{\infty} \frac{\arctan(x^2)}{(x^4 + kx^2 + 1)^2} dx, \quad k \in (0, 2) \cup (2, \infty).$$

证明当 $k > 2$ 时,

$$I(k) = \frac{\pi^2(k+3)}{16(k+2)\sqrt{k+2}} - \frac{\pi(k-3)}{4(k-2)\sqrt{k-2}} \arctan\left(\frac{\sqrt{k-2}}{\sqrt{k+2} + 2\sqrt{2}}\right) - \frac{\pi(k-1)}{2\sqrt{2}(k-2)\sqrt{k+2}(\sqrt{k+2} + \sqrt{2})},$$

当 $0 < k < 2$ 时,

$$I(k) = \frac{\pi^2(k+3)}{16(k+2)\sqrt{k+2}} - \frac{\pi(3-k)}{8(2-k)\sqrt{2-k}} \ln\left(\frac{2\sqrt{2} + \sqrt{k+2} + \sqrt{2-k}}{2\sqrt{2} + \sqrt{k+2} - \sqrt{2-k}}\right) + \frac{\pi(k-1)}{2\sqrt{2}(2-k)\sqrt{k+2}(\sqrt{k+2} + \sqrt{2})}.$$

(2) 设

$$I_n = \int_1^2 \int_1^2 \cdots \int_1^2 \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} - x_n}{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n} dx_1 dx_2 \cdots dx_n, \quad n \geq 3,$$

$$J_n = \frac{1 - I_n}{2}, \quad n \geq 3,$$

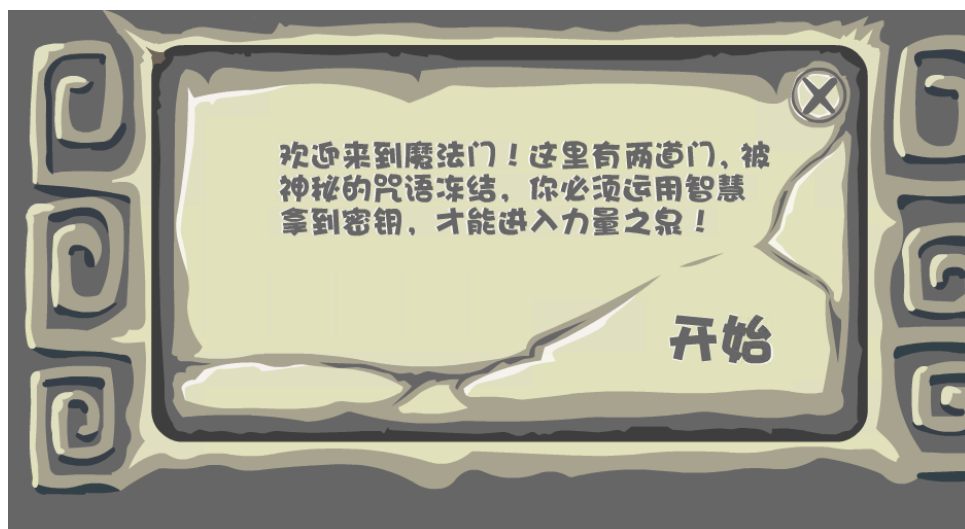
$J_1 = 1, J_2 = \frac{1}{2}$. 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} J_n^s = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}, \quad s > 1.$$

这里 p 表示质数.

(本小题满分26分) 力量之泉位于摩尔庄园西部浆果丛林最深处的彩虹瀑布旁. 今年夏天, 拉姆学院院长菩提大伯带领学院的学生们前往郊游, 他们准备深入力量之泉进行一场充满挑战的探险. 请你运用扎实的数学知识, 帮助他们解决探险途中遇到的各种问题.

(1) 力量之泉门口立着一块古老的魔法门. 今年的规定格外严格: 只有连续正确回答26道题目, 才能开启大门进入其中. 菩提大伯身边的拉姆葡萄正处在超级拉姆形态. 他站在门口一脸疑惑, 忍不住问道: “我不是超级拉姆吗? 按照这个门的规定, 超级拉姆不是可以直接进入, 不用再回答问题了吗?” 菩提大伯笑了笑说: “好了, 花点儿时间去挑战数学有趣的难题, 不要再讨论这件事了.” 已知拉姆葡萄每次回答问题正确的概率为 p ($0 < p < 1$), 且每次回答相互独立. 求葡萄为了通过魔法门, 所需回答问题次数的数学期望.



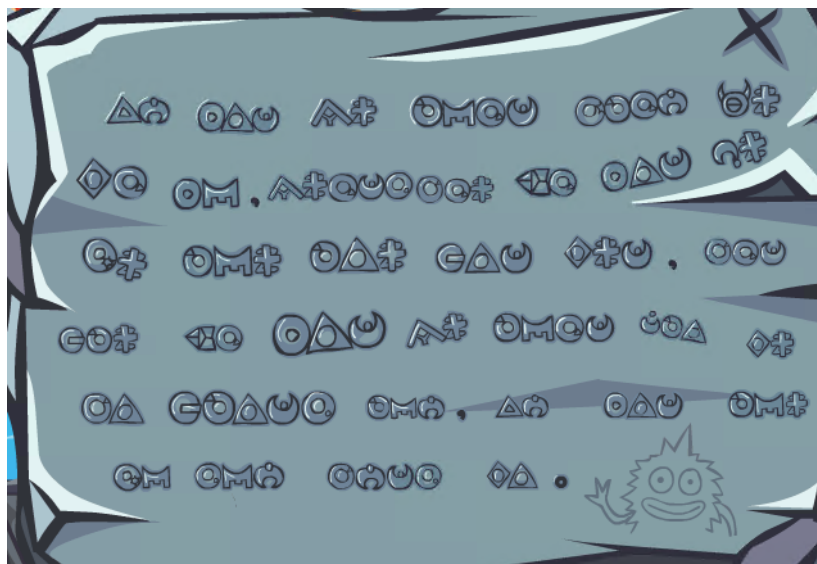
(2) 经过不懈努力，大家终于连续答对了26道题目，顺利通过了魔法门，进入了力量之泉。映入眼帘的，是一块古老而奇特的石板。石板上刻着一段神秘的古老密码。经过菩提大伯的破译，密码的内容是这样的：求下面这个无穷嵌套表达式 ℓ 的值：

$$\ell = 1 + (1 \div (2 + (2 \div (3 + (3 \div (4 + (4 \div (5 + (5 \div (6 + (6 \div (7 + (7 \div (8 + (8 \div (9 + (9 \div (10 + (10 \div (11 + (11 \div (12 + (12 \div (13 + (13 \div (14 + (14 \div (\dots$$

即

$$\ell = 1 + \frac{1}{2 + \frac{2}{3 + \frac{3}{4 + \dots}}}$$

(3) 夜晚，进入力量之泉的溶洞后，大家发现泉水上方有着无数一闪一闪的萤火虫。这些无数萤火虫的飞行轨迹形成了一个神秘的圆周动力系统。菩提大伯告诉学生们：萤火虫的位置可以用实数轴上的点来描述。



设函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 描述了萤火虫每一次“闪烁跳跃”的规律. 已知 f 在 $\mathbb{R}$ 上单调连续, 且满足

$$f(x+1) = f(x) + 1.$$

记 f^n 为 f 的 n 次复合(即萤火虫连续“闪烁跳跃” n 次后的位置), 并定义

$$\varphi_n(x) = f^n(x) - x.$$

请帮助拉姆学院的学生们解决以下问题: 证明: 对于任意 $x \in \mathbb{R}$, 极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_n(x)}{n}$$

都存在. 同时探索极限值与 x 是否有关.

(4) 随着大家往力量之泉溶洞的地底下深处走去, 路旁的泉水温度突然变得越来越高, 大家能明显感受到滚烫的热浪扑面而来.



菩提大伯凭借多年的探险经验, 立刻预感到地下可能出现了异常的热源, 于是果断命令全体人员立即向出口撤离. 菩提大伯着急地说: “好了, 花点儿时间去讨论撤离这件事, 不要再挑战数学有趣的难题了.” 与此同时, 随行的科学考察人员大卫对地下沸腾的泉水进行了紧急研究. 他发现: 这股异常热量并不会一直停留在原地, 而是会不断地向周围扩散. 这种扩散过程恰好满足著名的热传导方程. 为了研究这股热量是否会随着时间逐渐消失以及消失的速度有多快, 大卫把地下通道理想化为长度为 1 的一维区间. 通道两端与外界相连, 温度保持为 0, 因此有边界条件

$$u(0, t) = u(1, t) = 0.$$

根据热传导规律, 温度 $u(x, t)$ 满足

$$u_t = u_{xx}, \quad x \in (0, 1), \quad t > 0.$$

初始时刻的温度分布为

$$u(x, 0) = u_0(x),$$

其中假设初始热量是有限的, 即

$$\int_0^1 |u_0(x)|^2 dx < \infty.$$

证明这股异常热量会随着时间指数级地消失, 即存在常数 $M \geq 1$ 和 $\omega > 0$, 使得对任意满足上述条件的初始温度 u_0 , 都有

$$\sqrt{\int_0^1 |u(x, t)|^2 dx} \leq M e^{-\omega t} \sqrt{\int_0^1 |u_0(x)|^2 dx}, \quad t \geq 0.$$

请给出最大可能的衰减速度 ω , 并说明理由.



第十届拉姆杯数学竞赛

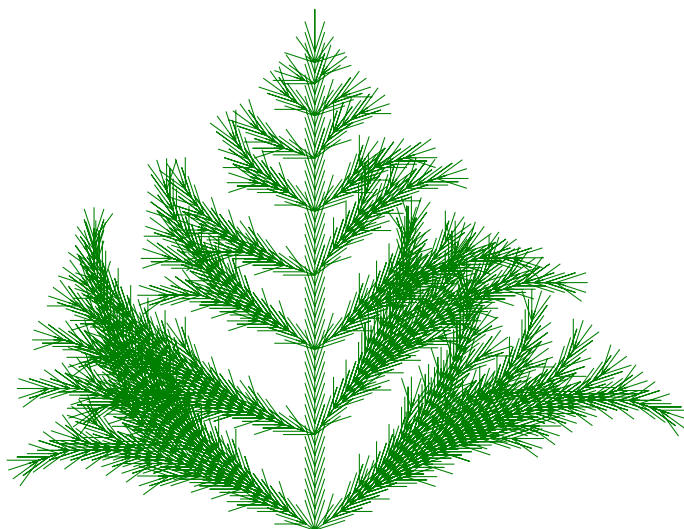
大学组(二)

8.19



Contest Introduction

1. There are 6 problems. The full mark of this math contest is 120. The exam will begin on 8.19 18:45.
2. After the exam, you need to open the math website link **<http://lamu.run>** (or **<https://lamu.run>**) as soon as possible to complete the upload of the answer sheet. If you do not know how to operate it or your file is too large (more than 60MB), you can also send it to my personal website E-mail: **alinalagrange@lamu.run** or my math website official E-mail: **math@lamu.run**
3. This time the contest is a closed book exam. Do not discuss each other or send questions to other chat groups during the exam.
4. This contest is made by Alina Lagrange.
(My personal website **<http://alinalagrange.cn>**)





Question 1 (20 points). 判断以下命题是否正确, 正确的命题给出证明, 错误的命题说明理由.

(a) 对于 $1 \leq p < \infty$, 存在常数 C_p 满足: 对于任意 $\mathbb{R}^n$ 上的局部可积函数 f , 如果 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, 则有

$$\|f^*\|_p \leq C_p \|f\|_p,$$

其中 f^* 是 Hardy-Littlewood 极大函数, 定义为:

$$f^*(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)| dy.$$

(b) 区间 $[0, 1]$ 上无处稠密零测度集 E 的特征函数 χ_E 在 $[0, 1]$ 上 Riemann 可积, 同时区间 $[0, 1]$ 上零测度闭集 F 的特征函数 χ_F 在 $[0, 1]$ 上 Riemann 可积.

(c) 设 μ 为可分度量空间 X 上的外测度, 并且使一切 Borel 集 μ -可测且 $\mu(X) < \infty$. 令

$$E_\infty := \left\{ x \in X : \limsup_{\rho \rightarrow 0} \frac{\mu(B_\rho(x))}{\rho} = \infty \right\}.$$

那么 E_∞ 的一维 Hausdorff 测度 $m_H(E_\infty) = 0$.

(d) 设 X_0 是 Banach 空间 X 的闭子空间. 记商映射

$$Q : X \rightarrow X/X_0, \quad x \mapsto x + X_0.$$

那么 X 自反当且仅当 X_0 和 X/X_0 自反.

Question 2 (20 points). 设 $a = (a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, 即

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 < \infty.$$

(1) 试确定最佳常数 $\mathfrak{c} > 0$ 使得

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq m}} \frac{a_n}{n - m} \right|^2 \leq \mathfrak{c} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2$$

恒成立. 在这里最佳常数是指对于任何 $C < \mathfrak{c}$, 上述不等式在将 $\mathfrak{c}$ 替换为 C 后均不再对所有 $a \in \ell^2(\mathbb{Z})$ 成立.

(2) 证明或者否定: $\mathfrak{c}$ 是超越数.



Question 3 (15 points). 说明: 从下面两题任意选择一题进行解答.

(A) 设 g 是整函数, $g(0) = 1$ 且对所有 $z \in \mathbb{C}$ 满足

$$|g(z)| \leq e^{\operatorname{Re} z}.$$

设 f 是无界整函数. 假设对任意实数 z_0 , 在 z_0 处展开的解析级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

中, 存在某个正整数 n 使得 $c_n = 0$ (即 $f^{(n)}(z_0) = 0$). 请探究是否存在这样的 f , 使得 $\mathfrak{H}(z) = g(z) - f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上的零点个数不超过 2026? 若不存在, 证明你的结论; 若存在, 求出所有满足上述条件的 f .

(B) 设

$$I(k) = \int_0^{\infty} \frac{\arctan(x^2)}{(x^4 + kx^2 + 1)^2} dx, \quad k \in (-2, 2) \cup (2, \infty).$$

证明当 $k > 2$ 时,

$$I(k) = \frac{\pi^2(k+3)}{16(k+2)\sqrt{k+2}} - \frac{\pi(k-3)}{4(k-2)\sqrt{k-2}} \arctan\left(\frac{\sqrt{k-2}}{\sqrt{k+2} + 2\sqrt{2}}\right) - \frac{\pi(k-1)}{2\sqrt{2}(k-2)\sqrt{k+2}(\sqrt{k+2} + \sqrt{2})},$$

当 $-2 < k < 2$ 时,

$$I(k) = \frac{\pi^2(k+3)}{16(k+2)\sqrt{k+2}} - \frac{\pi(3-k)}{8(2-k)\sqrt{2-k}} \ln\left(\frac{2\sqrt{2} + \sqrt{k+2} + \sqrt{2-k}}{2\sqrt{2} + \sqrt{k+2} - \sqrt{2-k}}\right) + \frac{\pi(k-1)}{2\sqrt{2}(2-k)\sqrt{k+2}(\sqrt{k+2} + \sqrt{2})}.$$

Question 4 (20 points). 说明: 从下面两题任意选择一题进行解答.

(A) 设有界区域 $U \subset \mathbb{R}^n$, $n > 3$ 满足 $\forall x \in \bar{U}$, $\{\lambda x : 0 \leq \lambda \leq 1\} \subset \bar{U}$, $u \in C^2(\bar{U})$ 是方程

$$-\Delta u = |u|^{p-1}u, \quad x \in U, \\ u|_{\partial U} = 0$$

的解, 且 $p > 1 + \frac{4}{n-2}$, 求所有满足上述方程的函数 u .

(B) 设 $F(x) \in C[a, b]$ 是连续函数, $f(x) \in L[a, b]$ 是 Lebesgue 可积的. 证明: 若至多除去一个可数集之外有 $F'(x) = f(x)$, 则

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$



Question 5 (20 points). 设 $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $Q \subset \mathbb{R}^n$ 是中心在原点, 边平行于坐标轴的方体, 我们用

$$f_Q^* = \frac{1}{m(Q)} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y) - \text{Avg}_Q f| dy$$

表示 f 在 Q 上的平均振动, 其中 $\text{Avg}_Q f$ 表示 f 在 Q 上的平均值. 定义

$$\|f\|_{\text{BMO}} = \sup_{Q \subset \mathbb{R}^n} f_Q^*.$$

(1) 设 $\alpha > 0$, 求 α 的最大值 α_0 使得 $|\ln|x||^{\alpha_0} \in \text{BMO}(\mathbb{R}^n)$.

(2) 对上题的最大值 α_0 , 证明: $s < 1013\alpha_0$ 是 $\dot{H}^s(\mathbb{R}^{2026})$ 为 Hilbert 空间的充分必要条件.

(3) 设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in \text{BMO}(\mathbb{R}^n)$. 证明

$$f * g \in \text{BMO}(\mathbb{R}^n),$$

并且

$$\|f * g\|_{\text{BMO}} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{\text{BMO}}.$$

(4) 证明存在常数 C 使得

$$\|u\|_{\text{BMO}} \leq C \|u\|_{\dot{H}^{\frac{n}{2}}}$$

对所有函数 $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \cap \dot{H}^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)$ 成立.

Question 6 (25 points). 考虑非线性方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + p(t, x) = 0, \quad (1)$$

这里 $p(t, x+1) = p(t, x)$ 且 $p(t, x)$ 对 t 是一个频率为 $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)^T$ 的拟周期函数, 即存在定义在 $\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}$ 上的函数 $f(\theta, x)$ 满足

$$p(t, x) = f(\omega t, x),$$

$\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ 是一个 n 维环面. 假定 $f(\theta, x)$ 是 $\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}$ 上的一个实解析函数并且频率 ω 满足

$$|(k, \omega)| \geq \gamma |k|^{-(n+1)}, \quad 0 \neq k \in \mathbb{Z}^n, \quad (2)$$

其中 $\gamma > 0$ 是常数. 证明如果 (2) 成立, 那么 (1) 是 Lagrange 稳定的充分必要条件是

$$\int_{\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}} f(\theta, x) d\theta dx = 0.$$