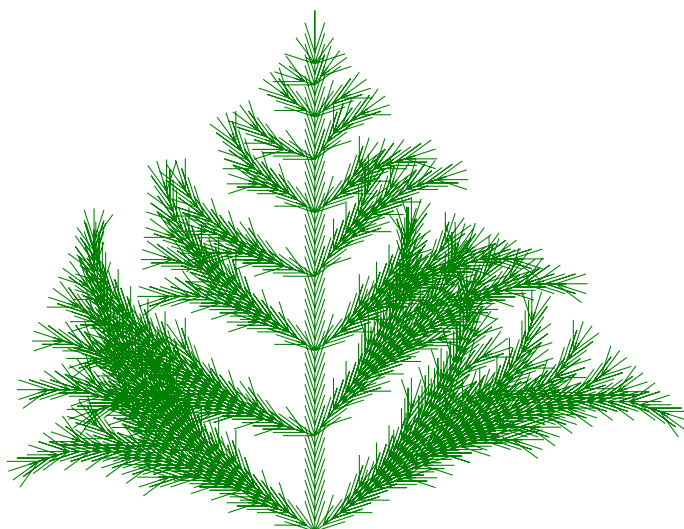




第十届拉姆杯数学竞赛

大学组(一)

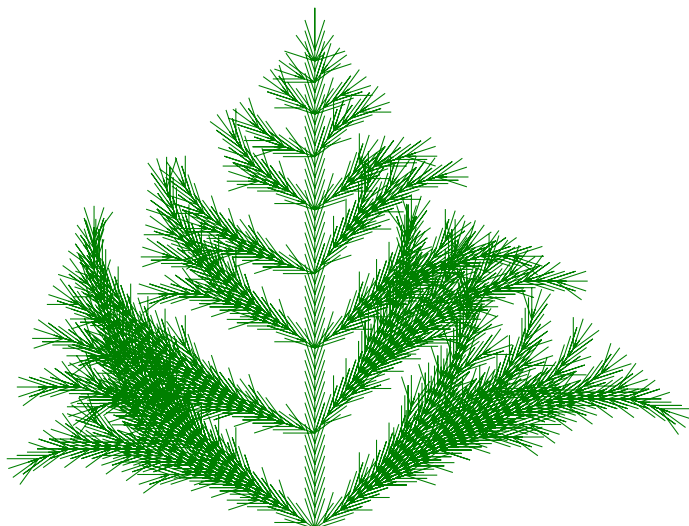
8.19





比 赛 介 绍

1. 满分为100分, 考试将于8月19日晚上18:45开始.
2. 考试结束后, 请尽快打开数学竞赛网站链接 <http://lamu.run> (或 <https://lamu.run>), 完成答题卡的上传.
如果您不知道如何操作, 或者您的文件太大(超过60MB), 您也可以将答题卡发送到我的个人网站邮箱 alinalagrange@lamu.run, 或者发送到数学竞赛官方邮箱 math@lamu.run.
3. 这次考试是闭卷考试, 请在考试期间不要互相讨论, 也不要向其他聊天群组发送题目询问.
4. 这次竞赛是由 Alina Lagrange 命题.
(我的个人网站是 <http://alinalagrange.cn>)





填空题 (满分24分)

1. 计算

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \arccos \left(\frac{1 - 2 \cos \theta}{1 + 4 \cos \theta} \right) d\theta + \int_0^{\arccos \frac{1}{4}} \arccos \left(\frac{1}{1 + 2 \cos \theta} \right) d\theta.$$

2. 求

$$\min_{x \in \mathbb{R}} \sqrt{3 + \cos x} + \sqrt{2 \sin x + 7}.$$

3. 设

$$\mathcal{H}_n = \sum_{m=1}^n (-1)^{m-1} \binom{n}{m} \frac{1}{m},$$

并令

$$b_n = \mathcal{H}_n - \ln n, \quad n \geq 1.$$

定义 $\{a_n\}$:

$$a_1 = 1, \quad a_n = \frac{b_n + 2}{b_{n-1}}, \quad n \geq 2.$$

求级数

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

4. Catalan 常数常用字母 G 表示, 它的定义是

$$G := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}.$$

参考以上, 计算

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{(1+xt) \ln x \ln t}{(1+x^2)(1+t^2)} dx dt.$$

判断题 (满分15分, 判断下面命题是否正确, 请给出判断结果并写出证明过程)

(I) 存在 $f \in C[0, 1]$ 使

$$\int_0^1 x f(x) dx = 1$$

且对一切 $n \in \{0, 2, 3, \dots\}$ 有

$$\int_0^1 x^n f(x) dx = 0.$$



(II) 设

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n} \cos(10^{2n}x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

那么 f 处处不可微.

(III) 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 > 0$,

$$a_{n+1} = a_n + \ln \left(1 + \frac{a_n}{n} \right),$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{a_n \ln n} - \frac{4}{3 \ln n} (\ln a_n - \ln n) = 1.$$

解答题 (满分61分, 解答请写出证明或者计算过程)

(本小题满分15分) 设 F_n 为 Fibonacci 数列, 满足 $F_1 = F_2 = 1$,

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad \forall n \geq 2,$$

令

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n F_{n+4}}.$$

设函数 $\varphi(x) > 0$ 在 $(0, \infty)$ 单调递增, 同时函数 $u(x)$ 满足 $0 < u(x) < \infty$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi(tx)}{\varphi(t)} = u(x), \quad \forall x > 0,$$

且

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi(te)}{\varphi(e)} = u(e) = e^{\frac{18}{7}S}.$$

设

$$I = \int_{\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)^{2026}} \prod_{j=1}^{2026} \left[1 + u(x_j) \ln u(x_j) - \ln(u(x_j) + 1) \right]^{-1} dx_1 dx_2 \cdots dx_{2026}.$$

令

$$\begin{aligned} \zeta_n &= \ln(5 + 3n^2) - \ln 5 - 2 \ln n, \\ \theta_n &= \zeta_n - \left(\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{n^2}\right)} + \frac{3}{5} \right) - e^{\frac{1}{n^2} - \frac{2}{5}}. \end{aligned}$$

证明

$$I < \frac{1}{4^{2026} \prod_{n=2026}^{4051} (2 + \theta_n)}.$$



(本小题满分20分)

(1) 设

$$I(k) = \int_0^{\infty} \frac{\arctan(x^2)}{(x^4 + kx^2 + 1)^2} dx, \quad k \in (0, 2) \cup (2, \infty).$$

证明当 $k > 2$ 时,

$$I(k) = \frac{\pi^2(k+3)}{16(k+2)\sqrt{k+2}} - \frac{\pi(k-3)}{4(k-2)\sqrt{k-2}} \arctan\left(\frac{\sqrt{k-2}}{\sqrt{k+2} + 2\sqrt{2}}\right) - \frac{\pi(k-1)}{2\sqrt{2}(k-2)\sqrt{k+2}(\sqrt{k+2} + \sqrt{2})},$$

当 $0 < k < 2$ 时,

$$I(k) = \frac{\pi^2(k+3)}{16(k+2)\sqrt{k+2}} - \frac{\pi(3-k)}{8(2-k)\sqrt{2-k}} \ln\left(\frac{2\sqrt{2} + \sqrt{k+2} + \sqrt{2-k}}{2\sqrt{2} + \sqrt{k+2} - \sqrt{2-k}}\right) + \frac{\pi(k-1)}{2\sqrt{2}(2-k)\sqrt{k+2}(\sqrt{k+2} + \sqrt{2})}.$$

(2) 设

$$I_n = \int_1^2 \int_1^2 \cdots \int_1^2 \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} - x_n}{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n} dx_1 dx_2 \cdots dx_n, \quad n \geq 3,$$

$$J_n = \frac{1 - I_n}{2}, \quad n \geq 3,$$

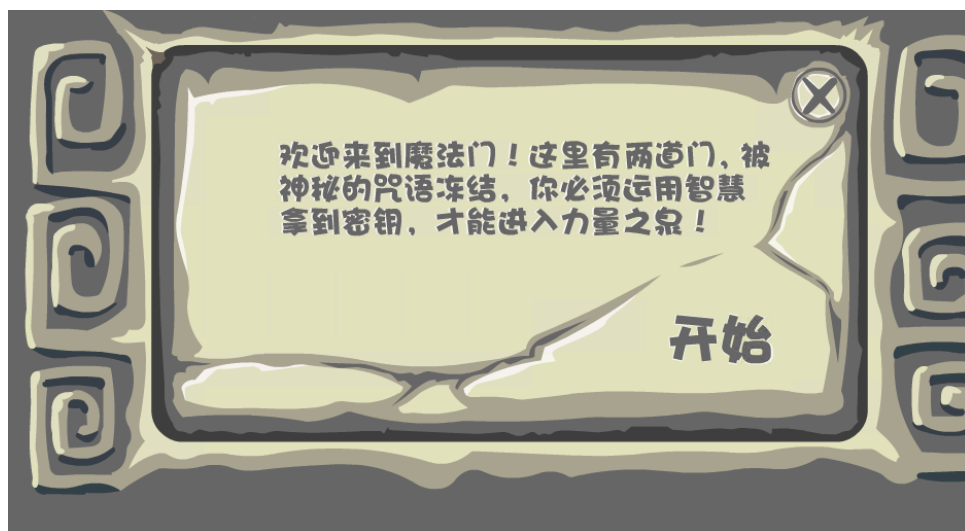
$J_1 = 1, J_2 = \frac{1}{2}$. 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} J_n^s = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}, \quad s > 1.$$

这里 p 表示质数.

(本小题满分26分) 力量之泉位于摩尔庄园西部浆果丛林最深处的彩虹瀑布旁. 今年夏天, 拉姆学院院长菩提大伯带领学院的学生们前往郊游, 他们准备深入力量之泉进行一场充满挑战的探险. 请你运用扎实的数学知识, 帮助他们解决探险途中遇到的各种问题.

(1) 力量之泉门口立着一块古老的魔法门. 今年的规定格外严格: 只有连续正确回答26道题目, 才能开启大门进入其中. 菩提大伯身边的拉姆葡萄正处在超级拉姆形态. 他站在门口一脸疑惑, 忍不住问道: “我不是超级拉姆吗? 按照这个门的规定, 超级拉姆不是可以直接进入, 不用再回答问题了吗?” 菩提大伯笑了笑说: “好了, 花点儿时间去挑战数学有趣的难题, 不要再讨论这件事了.” 已知拉姆葡萄每次回答问题正确的概率为 p ($0 < p < 1$), 且每次回答相互独立. 求葡萄为了通过魔法门, 所需回答问题次数的数学期望.



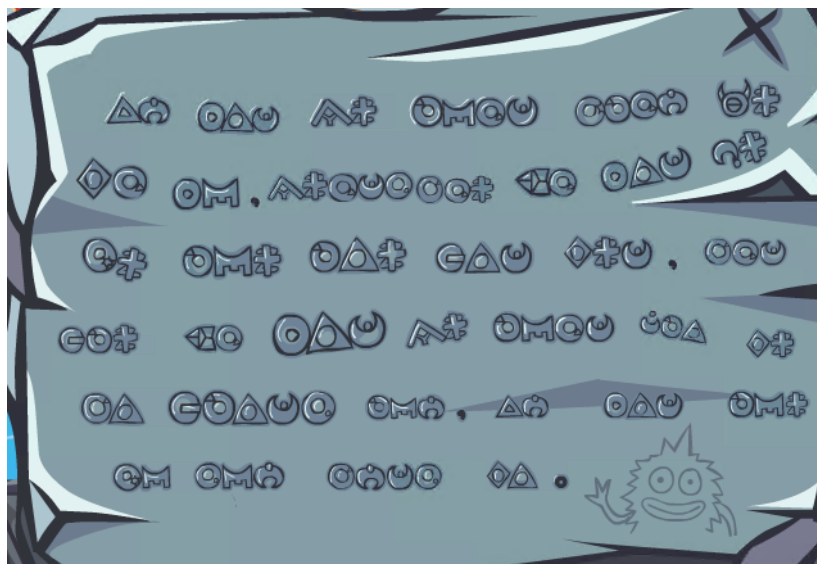
(2) 经过不懈努力，大家终于连续答对了26道题目，顺利通过了魔法门，进入了力量之泉。映入眼帘的，是一块古老而奇特的石板。石板上刻着一段神秘的古老密码。经过菩提大伯的破译，密码的内容是这样的：求下面这个无穷嵌套表达式 ℓ 的值：

$$\ell = 1 + (1 \div (2 + (2 \div (3 + (3 \div (4 + (4 \div (5 + (5 \div (6 + (6 \div (7 + (7 \div (8 + (8 \div (9 + (9 \div (10 + (10 \div (11 + (11 \div (12 + (12 \div (13 + (13 \div (14 + (14 \div (\dots$$

即

$$\ell = 1 + \frac{1}{2 + \frac{2}{3 + \frac{3}{4 + \dots}}}$$

(3) 夜晚，进入力量之泉的溶洞后，大家发现泉水上方有着无数一闪一闪的萤火虫。这些无数萤火虫的飞行轨迹形成了一个神秘的圆周动力系统。菩提大伯告诉学生们：萤火虫的位置可以用实数轴上的点来描述。



设函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 描述了萤火虫每一次“闪烁跳跃”的规律. 已知 f 在 $\mathbb{R}$ 上单调连续, 且满足

$$f(x+1) = f(x) + 1.$$

记 f^n 为 f 的 n 次复合(即萤火虫连续“闪烁跳跃” n 次后的位置), 并定义

$$\varphi_n(x) = f^n(x) - x.$$

请帮助拉姆学院的学生们解决以下问题: 证明: 对于任意 $x \in \mathbb{R}$, 极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_n(x)}{n}$$

都存在. 同时探索极限值与 x 是否有关.

(4) 随着大家往力量之泉溶洞的地底下深处走去, 路旁的泉水温度突然变得越来越高, 大家能明显感受到滚烫的热浪扑面而来.



菩提大伯凭借多年的探险经验, 立刻预感到地下可能出现了异常的热源, 于是果断命令全体人员立即向出口撤离. 菩提大伯着急地说: “好了, 花点儿时间去讨论撤离这件事, 不要再挑战数学有趣的难题了.” 与此同时, 随行的科学考察人员大卫对地下沸腾的泉水进行了紧急研究. 他发现: 这股异常热量并不会一直停留在原地, 而是会不断地向周围扩散. 这种扩散过程恰好满足著名的热传导方程. 为了研究这股热量是否会随着时间逐渐消失以及消失的速度有多快, 大卫把地下通道理想化为长度为 1 的一维区间. 通道两端与外界相连, 温度保持为 0, 因此有边界条件

$$u(0, t) = u(1, t) = 0.$$

根据热传导规律, 温度 $u(x, t)$ 满足

$$u_t = u_{xx}, \quad x \in (0, 1), \quad t > 0.$$

初始时刻的温度分布为

$$u(x, 0) = u_0(x),$$

其中假设初始热量是有限的, 即

$$\int_0^1 |u_0(x)|^2 dx < \infty.$$

证明这股异常热量会随着时间指数级地消失, 即存在常数 $M \geq 1$ 和 $\omega > 0$, 使得对任意满足上述条件的初始温度 u_0 , 都有

$$\sqrt{\int_0^1 |u(x, t)|^2 dx} \leq M e^{-\omega t} \sqrt{\int_0^1 |u_0(x)|^2 dx}, \quad t \geq 0.$$

请给出最大可能的衰减速度 ω , 并说明理由.