



第十届拉姆杯数学竞赛

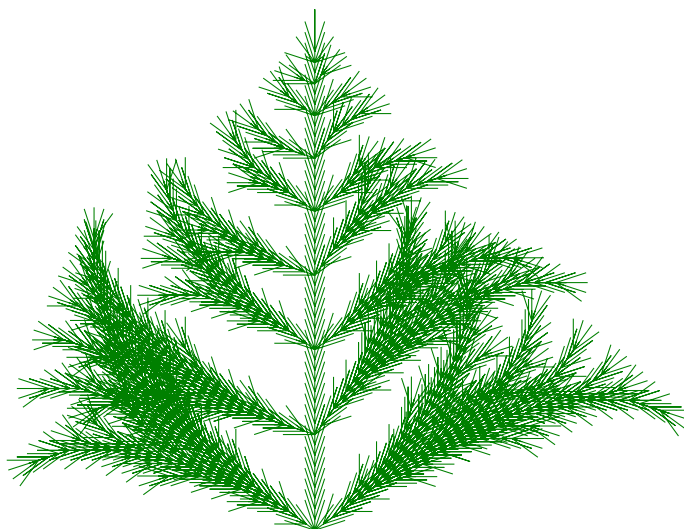
大学组(二)

8.19



Contest Introduction

1. There are 6 problems. The full mark of this math contest is 120. The exam will begin on 8.19 18:45.
2. After the exam, you need to open the math website link **<http://lamu.run>** (or **<https://lamu.run>**) as soon as possible to complete the upload of the answer sheet. If you do not know how to operate it or your file is too large (more than 60MB), you can also send it to my personal website E-mail: **alinalagrange@lamu.run** or my math website official E-mail: **math@lamu.run**
3. This time the contest is a closed book exam. Do not discuss each other or send questions to other chat groups during the exam.
4. This contest is made by Alina Lagrange.
(My personal website **<http://alinalagrange.cn>**)





Question 1 (20 points). 判断以下命题是否正确, 正确的命题给出证明, 错误的命题说明理由.

(a) 对于 $1 \leq p < \infty$, 存在常数 C_p 满足: 对于任意 $\mathbb{R}^n$ 上的局部可积函数 f , 如果 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, 则有

$$\|f^*\|_p \leq C_p \|f\|_p,$$

其中 f^* 是 Hardy-Littlewood 极大函数, 定义为:

$$f^*(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)| dy.$$

(b) 区间 $[0, 1]$ 上无处稠密零测度集 E 的特征函数 χ_E 在 $[0, 1]$ 上 Riemann 可积, 同时区间 $[0, 1]$ 上零测度闭集 F 的特征函数 χ_F 在 $[0, 1]$ Riemann 可积.

(c) 设 μ 为可分度量空间 X 上的外测度, 并且使一切 Borel 集 μ -可测且 $\mu(X) < \infty$. 令

$$E_\infty := \left\{ x \in X : \limsup_{\rho \rightarrow 0} \frac{\mu(B_\rho(x))}{\rho} = \infty \right\}.$$

那么 E_∞ 的一维 Hausdorff 测度 $m_H(E_\infty) = 0$.

(d) 设 X_0 是 Banach 空间 X 的闭子空间. 记商映射

$$Q : X \rightarrow X/X_0, \quad x \mapsto x + X_0.$$

那么 X 自反当且仅当 X_0 和 X/X_0 自反.

Question 2 (20 points). 设 $a = (a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, 即

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 < \infty.$$

(1) 试确定最佳常数 $\mathfrak{c} > 0$ 使得

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq m}} \frac{a_n}{n - m} \right|^2 \leq \mathfrak{c} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2$$

恒成立. 在这里最佳常数是指对于任何 $C < \mathfrak{c}$, 上述不等式在将 $\mathfrak{c}$ 替换为 C 后均不再对所有 $a \in \ell^2(\mathbb{Z})$ 成立.

(2) 证明或者否定: $\mathfrak{c}$ 是超越数.



Question 3 (15 points). 说明: 从下面两题任意选择一题进行解答.

(A) 设 g 是整函数, $g(0) = 1$ 且对所有 $z \in \mathbb{C}$ 满足

$$|g(z)| \leq e^{\operatorname{Re} z}.$$

设 f 是无界整函数. 假设对任意实数 z_0 , 在 z_0 处展开的解析级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

中, 存在某个正整数 n 使得 $c_n = 0$ (即 $f^{(n)}(z_0) = 0$). 请探究是否存在这样的 f , 使得 $\mathfrak{H}(z) = g(z) - f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上的零点个数不超过 2026? 若不存在, 证明你的结论; 若存在, 求出所有满足上述条件的 f .

(B) 设

$$I(k) = \int_0^{\infty} \frac{\arctan(x^2)}{(x^4 + kx^2 + 1)^2} dx, \quad k \in (-2, 2) \cup (2, \infty).$$

证明当 $k > 2$ 时,

$$I(k) = \frac{\pi^2(k+3)}{16(k+2)\sqrt{k+2}} - \frac{\pi(k-3)}{4(k-2)\sqrt{k-2}} \arctan\left(\frac{\sqrt{k-2}}{\sqrt{k+2} + 2\sqrt{2}}\right) - \frac{\pi(k-1)}{2\sqrt{2}(k-2)\sqrt{k+2}(\sqrt{k+2} + \sqrt{2})},$$

当 $-2 < k < 2$ 时,

$$I(k) = \frac{\pi^2(k+3)}{16(k+2)\sqrt{k+2}} - \frac{\pi(3-k)}{8(2-k)\sqrt{2-k}} \ln\left(\frac{2\sqrt{2} + \sqrt{k+2} + \sqrt{2-k}}{2\sqrt{2} + \sqrt{k+2} - \sqrt{2-k}}\right) + \frac{\pi(k-1)}{2\sqrt{2}(2-k)\sqrt{k+2}(\sqrt{k+2} + \sqrt{2})}.$$

Question 4 (20 points). 说明: 从下面两题任意选择一题进行解答.

(A) 设有界区域 $U \subset \mathbb{R}^n$, $n > 3$ 满足 $\forall x \in \bar{U}$, $\{\lambda x : 0 \leq \lambda \leq 1\} \subset \bar{U}$, $u \in C^2(\bar{U})$ 是方程

$$-\Delta u = |u|^{p-1}u, \quad x \in U, \\ u|_{\partial U} = 0$$

的解, 且 $p > 1 + \frac{4}{n-2}$, 求所有满足上述方程的函数 u .

(B) 设 $F(x) \in C[a, b]$ 是连续函数, $f(x) \in L[a, b]$ 是 Lebesgue 可积的. 证明: 若至多除去一个可数集之外有 $F'(x) = f(x)$, 则

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$



Question 5 (20 points). 设 $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $Q \subset \mathbb{R}^n$ 是中心在原点, 边平行于坐标轴的方体, 我们用

$$f_Q^* = \frac{1}{m(Q)} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y) - \text{Avg}_Q f| dy$$

表示 f 在 Q 上的平均振动, 其中 $\text{Avg}_Q f$ 表示 f 在 Q 上的平均值. 定义

$$\|f\|_{\text{BMO}} = \sup_{Q \subset \mathbb{R}^n} f_Q^*.$$

(1) 设 $\alpha > 0$, 求 α 的最大值 α_0 使得 $(\ln |x|)^{\alpha_0} \in \text{BMO}(\mathbb{R}^n)$.

(2) 对上题的最大值 α_0 , 证明: $s < 1013\alpha_0$ 是 $\dot{H}^s(\mathbb{R}^{2026})$ 为 Hilbert 空间的充分必要条件.

(3) 设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in \text{BMO}(\mathbb{R}^n)$. 证明

$$f * g \in \text{BMO}(\mathbb{R}^n),$$

并且

$$\|f * g\|_{\text{BMO}} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{\text{BMO}}.$$

(4) 证明存在常数 C 使得

$$\|u\|_{\text{BMO}} \leq C \|u\|_{\dot{H}^{\frac{n}{2}}}$$

对所有函数 $u \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n) \cap \dot{H}^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)$ 成立.

Question 6 (25 points). 考虑非线性方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + p(t, x) = 0, \quad (1)$$

这里 $p(t, x+1) = p(t, x)$ 且 $p(t, x)$ 对 t 是一个频率为 $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)^T$ 的拟周期函数, 即存在定义在 $\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}$ 上的函数 $f(\theta, x)$ 满足

$$p(t, x) = f(\omega t, x),$$

$\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ 是一个 n 维环面. 假定 $f(\theta, x)$ 是 $\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}$ 上的一个实解析函数并且频率 ω 满足

$$|(k, \omega)| \geq \gamma |k|^{-(n+1)}, \quad 0 \neq k \in \mathbb{Z}^n, \quad (2)$$

其中 $\gamma > 0$ 是常数. 证明如果 (2) 成立, 那么 (1) 是 Lagrange 稳定的充分必要条件是

$$\int_{\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}} f(\theta, x) d\theta dx = 0.$$